УДК 517.123

В.Г. Панов
(Уральская государственная
лесотехническая академия)

МЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА НА ПРОИЗВЕДЕНИИ МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Как известно, задание метрики на счётном произведении метрических пространств не составляет никакого труда. В то же время введение метрики в случае несчётного числа сомножителей проблематично и, по-видимому, не может быть сделано однозначно каким-то естественным способом. Тем не менее, с помощью некоторой числовой функции, заданной на произведении $\mathbf{R}^{\mathbf{A}}$ это удаётся сделать достаточно просто и абстрактно. Это даёт возможность строить примеры специальных метрических пространств, а также вскрывает единую природу различных классических метрических пространств (например, пространств Лебега и Бэра).

Если заданы метрические пространства (X_α, d_α) и на множестве значений $t^\alpha = \left\{d_\alpha(x^\alpha, y^\alpha)\right\}_{\alpha \in A}$ определена некоторая функция $\varphi(t^\alpha)$, то на произведении $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ можно определить метрику d_φ формулой

$$d_\varphi(x^\alpha, y^\alpha) = \varphi(d_\alpha(x^\alpha, y^\alpha)),$$

при условии, разумеется, что для так определённой функции действительно выполняются аксиомы метрики. При каких условиях это так требует дополнительного исследования в каждом конкретном случае. Однако при некоторых достаточно общих предположениях это можно проверить, используя следующую конструкцию.

Пусть $\mathbf{R}_0 = \{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$—множество неотрицательных действительных чисел, A—произвольное множество индексов. На подмножестве $\mathbf{R}_1$ множества $\prod_{\alpha \in A} \mathbf{R}_0$ всех последовательностей $(t^\alpha)_{\alpha \in A}$, $t^\alpha \in \mathbf{R}_0$ рассмотрим функцию $\varphi : \mathbf{R}_1 \to \mathbf{R}_0$, удовлетворяющую следующим аксиомам (первая аксиома вполне может быть опущена, если мы допускаем рассмотрение псевдометрических пространств):

1) $\varphi(t^\alpha) = 0$ тогда и только тогда, когда $t^\alpha = 0$ для всех $\alpha \in A$;

2) $\varphi(t^\alpha) \leq \varphi(s^\alpha)$, если $t^\alpha \leq s^\alpha$ для всех $\alpha \in A$;

3) $\varphi(t^\alpha + s^\alpha) \leq \varphi(t^\alpha) + \varphi(s^\alpha)$ для любых $(t^\alpha), (s^\alpha)$ из $\mathbf{R}_0^A$.

Если $\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0^A$, то функцию φ можно продолжить на пространство $\mathbf{R}^A$ чётным образом: $\varphi(t^\alpha) = \varphi(|t^\alpha|)$, если $(t^\alpha) \in \mathbf{R}^A$.

Как легко проверить, в результате пространство $\mathbf{R}^A$ наделяется метрикой $d(t^\alpha, s^\alpha) = \varphi(|t^\alpha - s^\alpha|)$, инвариантной относительно сдвига в $\mathbf{R}^A$.

Пусть (X_α, d_α)—произвольный набор метрических пространств. Обозначим через X_0 такое подмножество из $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$, чт о для любых элементов $(x^\alpha), (y^\alpha)$ из X_0 набор значений $d_\alpha(x^\alpha, y^\alpha)$ принадлежит $\mathbf{R}_1$.

Определим на пространстве $X_0 \times X_0$ числовую функцию d_φ следующим образом:

$$d_\varphi(x^\alpha, y^\alpha) = \varphi(d_\alpha(x^\alpha, y^\alpha)) \qquad (1)$$

Как легко убедиться, эта функция удовлетворяет всем аксиомам метрики и, следовательно, множество X_0 становится метрическим пространством, которое можно назвать **метрическим произведением** метрических пространств (X_α, d_α).

Можно также упростить проверку условия принадлежности $d_\alpha(x^\alpha, y^\alpha)$ множеству $\mathbf{R}_1$ следующим образом. Пусть функция $\varphi(t^\alpha)$ определена на $\mathbf{R}_0^A$ или на достаточно большом его подмножестве. Если (X_α, d_α)—произвольный набор метрических пространств, а $x_0 = (x_0^\alpha)$ — некоторая фиксированная точка из $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$,то множество X_0 из $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$,можно определить так, что для любого элемента (x^α) из X_0 набор значений $d_\alpha(x_0^\alpha, x^\alpha)$ принадлежит $\mathbf{R}_1$ и выполняется неравенство

$$\varphi(d_\alpha(x_0^\alpha, x^\alpha)) < \infty.$$

Отсюда следует, что для любых (x^α)и (y^α) из X_0 величина $\varphi(d_\alpha(x^\alpha, y^\alpha))$ конечна:

$$d_\alpha(x^\alpha, y^\alpha) \le d_\alpha(x^\alpha, x_0^\alpha) + d_\alpha(x_0^\alpha, y^\alpha) < \infty;$$

дальнейшее следует из аксиом 2) и 3).

Примеры

1. Равномерная метрика

Пусть $X_\alpha = (\mathbf{C}, |\cdot|)$—пространство комплексных чисел со стандартной метрикой, $z_0^\alpha = 0, \varphi(x^\alpha) = \sup(x^\alpha)$.Тогда X_0 с метрикой d_φ представляет собой пространство ограниченных комплекснозначных функций на A с равномерной метрикой. Если A – конечно, то (X_0, d_φ) есть векторное пространство $\mathbf{C}^n$с метрикой, порождённой нормой $\| z \| = \max | z^k |$. Если A – счётно, то (X_0, d_φ) – пространство ограниченных последовательностей с нормой $\| z \| = \sup | z^k |$.

2. Гильбертово произведение метрических пространств, или l_2-сумма метрических пространств

Пусть A – произвольное множество индексов, l_2 – гильбертово пространство квадратично суммируемых последовательностей, (X_α, d_α) – семейство произвольных метрических пространств, $x_0 = (x_0^\alpha)$ – произвольная точка из произведения $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$. Рассмотрим в множестве $\mathbf{R}^A$ подмножество $R_1 = \{(x^\alpha) \in \mathbf{R}^A \mid x^\alpha \neq 0$ только для конечного или счётного множества индексов, причём $\sum_{\alpha \in A} (x^\alpha)^2 < \infty\}$. Определим на множестве R_1 неотрицательную функцию $\varphi(x^\alpha) = (\sum_{\alpha \in A} (x^\alpha)^2)^{1/2}$. Множество X_0 выделяется условием: $X_0 = \{(x^\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \mid x^\alpha \neq x_0^\alpha$ только для конечного или счетного множества индексов, причём $\sum_{\alpha \in A} d_\alpha^2 (x^\alpha, x_0^\alpha) < \infty\}$. Можно доказать, что функция $\varphi(x^\alpha)$ удовлетворяет всем необходимым

аксиомам и тем самым пространство X_0 превращается в метрическое пространство с метрикой d_φ, определённой с помощью формулы (1).

3. l_p – сумма метрических пространств

При тех же условиях и обозначениях, при которых определялось гильбертово произведение метрических пространств, рассмотрим множество $R_1 = \{(x^\alpha) \in \mathbf{R}^A \mid x^\alpha \neq 0$ только для конечного или счётного множества индексов, причем $\sum_{\alpha \in A} (x^\alpha)^p < \infty\}$.

На множестве R_1 определим функцию $\varphi(x^\alpha) = \left(\sum_{\alpha \in A} (x^\alpha)^p \right)^{1/p}$. Множество X_0 выделяется условием:

$X_0 = \{(x^\alpha) \in \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \mid x^\alpha \neq x_0^\alpha$ только для конечного или счётного множества индексов, причём $\sum_{\alpha \in A} d_\alpha^p(x^\alpha, x_0^\alpha) < \infty\}$.

Аналогично предыдущему случаю для $\varphi(x^\alpha)$ выполняются аксиомы 1)–3) и пространство X_0 наделяется метрикой:

$$d_\varphi(x^\alpha, y^\alpha) = \left(\sum_{\alpha \in A} d_\alpha^p(x^\alpha, y^\alpha)\right)^{1/p}$$

По аналогии с предыдущим это метрическое пространство можно назвать l_p – суммой метрических пространств.

4. L_p – сумма метрических пространств

Пусть А—измеримое множество с мерой $\mu, (X_\alpha, d_\alpha)$— метрические пространства. В пространстве $\mathbf{R}_0^A$ отображений измеримого множества А выделим подмножество $R_1 = L_p^+$ неотрицательных функций, интегрируемых с р-й степенью, и положим

$$\varphi(t(a)) = \left(\int_A (t(a))^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

Из свойств интеграла на измеримом множестве вытекает справедливость аксиом 2), 3), а аксиома 1) выполняется с точностью до множеств нулевой меры.

Выделим в пространстве $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ такое подмножество X_0, что

$$\int_A d_\alpha^p(x(\alpha), x_0(\alpha)) d\mu < \infty,$$

где $x_0(\alpha)$ — некоторая фиксированная функция.

Таким образом, пространство X_0 наделяется метрикой

$$d_\varphi(x, y) = \left(\int_A [d_\alpha(x(\alpha), y(\alpha))]^p \, d\mu\right)^{1/p}$$

В частности, если X_α — множество действительных чисел, $x_0 = 0$—нулевая функция, то пространство (X_0, d_φ) есть лебегово пространство $L_p(A)$.

5. Бэровское пространство как метрическое произведение дискретных пространств

На множестве бесконечных неотрицательных последовательностей $x = \{x^n\}$ рассмотрим функцию:

$$\varphi(x) = \max\left\{\frac{1}{k} \mid x_k \neq 0\right\},$$

т. е. $\varphi(x) = 1/k$, если k — наименьшее значение, для которого $x_k \neq 0$. Если x = 0, то по определению будем считать, что $\varphi(x) = 0$. Таким образом, $\varphi(x)$ определена на множестве $\mathbf{R}_0^\omega$. Выполнение аксиом 1) – 3) доказывается элементарными выкладками, причём аксиома 3) выполняется в усиленном виде:

$$\varphi(u_n + v_n) = \max\{\varphi(u_n), \varphi(v_n)\} < \varphi(u_n) + \varphi(v_n).$$

Пусть S — бесконечное множество мощности τ с дискретной топологией, т. е. $d(s_1, s_2) = \delta(s_1, s_2)$. Для каждого $n \in \mathbf{N}$ обозначим через (X_n, d_n) пространство S с дискретной метрикой. Пусть $x_0 = (x_n^0)$ — произвольная точка из S^ω. Очевидно, что для любой $x = (x_n) \in S^\omega$ значение $\varphi(\delta(x_n^0, x_n))$ конечно, и, следовательно, пространство X_0 совпадает с S^ω. Метрика d_φ определяет на S^ω структуру метрического пространства, которое называется **бэровским пространством** веса τ.

Фактически, любое метрическое пространство на произведении множеств можно считать метрическим произведением некоторых метрических пространств.

Теорема. Пусть (X, d)— метрическое пространство, заданное на произведении множеств X_α : $X = \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$, $x_0 = \left(x_0^\alpha\right)$— некоторая фиксированная точка из X. Тогда на каждом множестве X_α можно ввести такую метрику d_α, а на некотором подмножестве из $\mathbf{R}_0^A$ можно определить такую функцию $\varphi : \mathbf{R}_0^A \to \mathbf{R}_0$, удовлетворяющую аксиомам 1) – 3), что метрика d будет равна метрике d_φ, определённой по формуле (1).

Доказательство. Пусть $x_0 = \left(x_0^\alpha\right) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ — произвольно выбранная фиксированная точка. Для любого $\beta \in A$ множество

$$\left\{\left(x_\alpha^\beta\right) \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \mid x_\beta^\alpha = x_0^\alpha, \text{если } \alpha \neq \beta \text{ и } x_\beta^\beta \in X_\beta\right\}$$

можно отождествить с X_β. Исходная метрика d индуцирует на X_β метрику d_β по формуле $d_\beta\left(x^\beta, y^\beta\right) = d\left((x_\beta^\alpha),(y_\beta^\alpha)\right)$, где

$$x_\beta^\alpha = \begin{cases} x_0^\alpha, \text{если } \alpha \neq \beta; \\ x^\beta, \text{если } \alpha = \beta; \end{cases} \quad \text{и} \quad y_\beta^\alpha = \begin{cases} y_0^\alpha, \text{если } \alpha \neq \beta; \\ y^\beta, \text{если } \alpha = \beta. \end{cases}$$

На множестве $\left(t^\alpha\right) = \left\{d_\beta\left(x^\beta, y^\beta\right)\right\}_{\beta\in A}$ из $\mathbf{R}_0^A$ определим функцию $\varphi\left(t^\beta\right) = d(x,y)$, где $x = \left(x^\beta\right), y = \left(y^\beta\right)$. Очевидно, она задаёт метрику на $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ как метрику d_φ по формуле (1).

При этом, однако, надо иметь в виду, что если на множествах X_α была задана метрическая структура, то она может не совпасть с той, которая построена в теореме. Например, пространство $\mathbf{R}^{2n}$ можно рассматривать с метрикой $\max\left\{\left|x^k\right|\right\}$, хотя каждое из $\mathbf{R}^n$ могло быть наделено евклидовой метрикой.